Matrices:

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz con m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una matriz con m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 4 & -i \\ 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$

Sistemas lineales (en $\mathbb{C}$)

Ej $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ ix - (1+i)y = -1-i \end{array} \right.$

Sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 incógnitas. Matricialmente se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitos:

$$\text{I}\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Con $a_{ij} \in \mathbb{C}$ con $\left.\begin{array}{l} i=1\dots m \\ j=1\dots n \end{array}\right\}$ son los coefi-cientes

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$

$x_1, \dots, x_n$ son las incógnitas.

Una solución $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (un vector de n elementos, cada uno un número complejo) es una solución del sistema I si el mismo vector $(x_1, \dots, x_n)$ satisface cada una de las m ecuaciones.

Matricialmente, el sistema (I) se escribe así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{es una matriz de } m\times n \text{ con}\\ \text{coeficientes en } \mathbb{C}\\ (\text{está en } \mathbb{C}^{m\times n})}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{un vector}\\ \text{vertical}\\ \text{incógnita}\\ \text{en } \mathbb{C}^{n\times 1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{un vector}\\ \text{vertical}\\ \text{de coeficientes}\\ \text{dados}\\ \text{en } \mathbb{C}^{m\times 1}}}$$

Se escribe resumido:

$$A x = b$$

Algunas definiciones

1) El sistema (I) se dice **homogéneo** si $(b_1, \ldots, b_m) = (0, \ldots, 0)$

2) Dado un sistema como (I)

se llama **sistema homogéneo asociado** a (I) al sistema que tiene mismos coeficientes a_{ij} pero se reemplazan los b_i's con ceros. <u>Ejemplo</u>:

El sistema $\begin{cases} x-2y=0 \\ ix-(1+i)y=-1-i \end{cases}$

tiene como sistema homogéneo asociado a:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ ix-(1+i)y=0 \end{cases}$$

→ Acá ya había un cero, lo dejo

→ Acá no había cero, pongo un cero

3) Dado un sistema lineal $Ax=b$, $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{C}^{m\times 1}$

puede pasar:

i) El sistema no tiene solución (se dice **incompatible**: S.I.)

ii) El sistema tiene única solución (se dice **compatible determinado**: S.C.D.)

iii) El sistema tiene infinitas soluciones (se dice **compatible indeterminado**: S.C.I.)

4) Un sistema homogéneo siempre tiene $\bar{x}=\bar{0}$ como solución.

Resolvamos el sistema anterior:
Hacemos operaciones de fila a la **matriz ampliada**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ i & -1-i & -1-i \end{array}\right) \underset{F_2 - iF_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & i-1 & -1-i \end{array}\right)$$

$-1-i+2i=i-1$

Nos queda: $x-2y=0$

$(i-1)y=-1-i$

$\Rightarrow$ multiplicamos la segunda ecuación por $\dfrac{\overline{i-1}}{|i-1|^2}$ (que es el inverso de $i-1$)

$$y=(-1-i)\frac{(-i-1)}{2}=\frac{i+1+i^2+i}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2i}{2}=i \Rightarrow$$

de la primera ecuación $x=2y=2i$

Luego, obtuvimos que el sistema tiene única solución $(x,y)=(2i,i)$

<u>Recordemos</u> qué operaciones elementales no modifican el conjunto solución:

Si $A=\begin{pmatrix} \text{---}F_1\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}F_m\text{---} \end{pmatrix}$

1) Intercambiar dos filas $F_i \leftrightarrow F_j$

2) Multiplicar una fila por un múltiplo $k \neq 0$ $\quad kF_i \to F_i$

$k \in \mathbb{C} - \{0\}$.

3) Reemplazar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo de otra $\quad F_i + kF_j \to F_i$, $k \in \mathbb{C}$.

A este procedimiento se lo conoce como eliminación gaussiana

¿Cómo podemos saber a partir de la eliminación gaussiana cómo se clasifica el sistema y cuáles son las soluciones si las tiene?

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ se dice escalonada si cada fila F_i con $i \geq 2$ tiene más ceros iniciales que la fila anterior F_{i-1}, salvo de ambas filas sean de ceros.

Ej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ todas escalonadas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$ no es escalonada

OBS: En esta materia se trabaja con los cuerpos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (y se escribe en general $\mathbb{K}$ para referir a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

OBS: Dado un sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $Ax=b$ donde $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, la solución x buscada será $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la solución $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ " $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

(que en este caso puede ser tranquilamente una sol. real).

Ejemplos:

1) Resolver
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2) Resolver
$$\begin{aligned} i x_1 + i x_2 &= i \\ (1+i) x_1 - (1+i) x_2 &= 2+2i \end{aligned}$$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y el sistema lineal $Ax = b$, con $b \in \mathbb{K}^{m \times 1}$.

Consideramos el sistema homog asociado $Ax = 0$.

Retomamos la pregunta anterior:

¿Cómo podemos saber a partir de la eliminación Gaussiana cómo se clasifica el sistema y quiénes son sus soluciones, si las tiene?

Empecemos con ejemplos

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Llegamos a matriz escalonada en donde queda 1 fila no nula en las primeras 2 columnas y el resto de las filas cero en las 3 columnas.

Esto nos dice que tendremos infinitas soluciones, es decir es un sistema compatible indeterminado.

Para calcular las soluciones, de la ecuación que quedó:

$$5x_1 + 3x_2 = 11$$

Despejamos alguna de las variables:

$$x_2 = \frac{11 - 5x_1}{3} = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1$$

Luego las soluciones son:

$$(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \left\{ \left(x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1\right) : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 45 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 - 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - 4F_1 \to F_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora está escalonada.

Si miramos la F_2, tenemos

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ lo cual no tiene solución, luego

$$S = \emptyset.$$

3) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 10x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 10 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{matriz escalonada}}$$

De la 2da ec. $x_2 = 0$

De la 1ra ec. $5x_1 + 3\underbrace{x_2}_{\shortparallel} = 11$

$\Rightarrow 5x_1 + 3 \cdot 0 = 11$

$\Rightarrow x_1 = \frac{11}{5}$

$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{11}{5}, 0 \right) \right\}$.

En resumen:

Dado un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, si lo escribimos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

con $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \dots, m$
$j = 1, \dots, n$

Triangulamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

y obtenemos la matriz escalonada $\tilde{A}|\tilde{b}$.

1) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene menos de n (número de incógnitas) filas con entradas no nulas en las primeras n columnas y el resto de las filas de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ son nulas en las $n+1$ columnas

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). (Ej 1)

2) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene alguna fila que tiene sus primeras n columnas nulas pero en la columna $n+1$ de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ un escalar no nulo, es decir, en $(\tilde{A}|\tilde{b})$ se tiene una fila

$$0 \dots 0 \mid b \neq 0 \qquad \text{(Ej 2)}$$

entonces el sistema es incompatible (no tiene solución)

3) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene exactamente n (número de incógnitas) filas no nulas, entonces el sistema es compatible determinado (única solución).

(Ej 3).

Tanto en 1 como en 3, las soluciones ó la solución se construyen a partir de la matriz escalonada $\tilde{A}$ con la sustitución hacia atrás.

Notar que en el caso 3) si al hacer la eliminación de Gauss obtuvimos n filas no nulas, es porque comenzamos con al menos esa cantidad de filas (ecuaciones), es decir $m \geq n$.

Relación entre sistema no homogéneo y homogéneo asociado.

Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ tenemos

(H) $\quad Ax = b \quad$ Sist. lineal no homog

(H_0) $\quad Ax = 0 \quad$ Sist lineal homog asociado

OBS: Sea x_0 es sol de (H)

1) Si x es sol de (H_0) entonces $x + x_0$ es sol de (H)

2) Si x es sol de (H) entonces $x - x_0$ es sol de (H_0)

de donde podemos ver que

$x = x_0 + x - x_0$ se escribe

como x_0 + solución de (H$_0$)

(Pensar cómo escribir ej 2) P1

y recordar que una igualdad

de conjuntos es una doble

contención).

Ejercicios con parámetros:

1) Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

clasificar para cada $k \in \mathbb{R}$.

Planteamos eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & k-8 & 1-2k \\ 0 & -2 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & -2 & 1-k \\ 0 & k-8 & 1-2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & -2 & 1-k \\ 0 & 0 & -k^2+5k-6 \end{pmatrix}$$

$2F_3 + (k-8)F_2 \to F_3$

$2(1-2k) + (k-8)(1-k) = 2-4k+k-8-k^2+8k$

$= -k^2+5k-6$

Vemos que $-k^2+5k-6=0 \iff k=3$ ó $k=2$

Luego, si $k \neq 3$ y $k \neq 2 \to$ SCD

y si $k=3$ ó $k=2 \to$ S.C.I

2) Clasificar para k y a, b, c:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + kx_3 &= a \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & k & a \\ 2 & k & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & k & a \\ 0 & k-8 & 1-2k & b-2a \\ 0 & -2 & 1-k & c-a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & k & a \\ 0 & -2 & 1-k & c-a \\ 0 & k-8 & 1-2k & b-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & a \\ 0 & -2 & 1-k & c-a \\ 0 & 0 & -k^2+5k-6 & 2(b-2a)+(k-8)(c-a) \end{array}\right)$$

Si $k \neq 2$, $k \neq 3$ $\Rightarrow$ SCD $\forall a, b, c$

Si $k = 2$ y $2b + 2a - 6c = 0$

$\Rightarrow$ SCI

y $2b + 2a - 6c \neq 0$

$\Rightarrow$ SI

$k = 3$ y $b - 3a + 5c = 0$

$\Rightarrow$ SCI

$b - 3a + 5c \neq 0$

$\Rightarrow$ SI.